$(*)$

Πρόταση: Έστω $a \in \bar{A}$ ανν $(\forall G \in \mathcal{T}) : a \in G$ ισχύει $G \cap A \neq \emptyset$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\{\Rightarrow\}$ Έστω $a \in \bar{A}$ και $(\exists G \in \mathcal{T}) : a \in G$ ισχύει $G \cap A = \emptyset$.

Άρα $A \subseteq G^c \xRightarrow{G^c \text{ ανοιχτό}} \bar{A} \subseteq G \xRightarrow{a \in \bar{A}} a \in G^c$ Άτοπο

$\{\Leftarrow\}$: Έστω ότι ισχύει το $(*)$ και $a \notin \bar{A}$

Άρα, $a \in (\bar{A})^c$, $\bar{A}^c$ ανοιχτό αλλά $A \cap (\bar{A})^c = \emptyset$ Άτοπο

(5'05')

Πρόταση: A πυκνό αν.ν $[(\forall B \in \mathcal{J})\ B \neq \emptyset$ ισχύει $A \cap B \neq \emptyset]$ (*)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\{\Rightarrow\}$: Έστω $\overline{A} = E$ και $\emptyset \neq B \in \mathcal{J}$ με $a \in B \Rightarrow a \in E \Rightarrow a \in \overline{A} \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{Πρόταση}} B \cap A \neq \emptyset$.

$\{\Leftarrow\}$: Έστω ισχύει το (*) και έστω τυχόν $x \in E$ και ΘΔΟ $E \subseteq \overline{A}$.

Θεωρούμε ένα $B \in \mathcal{J}$ με $x \in B \xRightarrow{(*)}$

$\Rightarrow B \cap A \neq \emptyset \xRightarrow{\text{Πρόταση}} x \in \overline{A}$

Παράδειγμα

Έστω $\mathcal{J} = \{E_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ και $E_\nu = \{\nu, \nu+1, \nu+2, \dots\}$

ΝΔΟ

i) $\mathcal{J}$ τοπολογία στο $\mathbb{N}$

ii) Να βρεθούν τα $\overline{\{7, 24, 47, 85\}}$ & $\overline{\{3, 6, 9, 12, \dots\}}$

iii) Να βρεθούν τα πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

i)

ii) $\overline{\{7, 24, 47, 85\}} = \{1, \dots, 85\}$ δηλ. βρίσκουμε τα κλειστά υπερσύνολα αυτού και μετά παίρνουμε την τομή αυτών δηλαδή το ελάχιστο εξ αυτών.

Πιο μαθηματικά:

F κλειστό, $F \supseteq \{7, 24, 47, 85\} \Leftrightarrow F = \{1, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}, k \geq 85$

Άρα, $\overline{\{7, 24, 47, 85\}} = \cap G = \{1, \dots, 85\}$

&

$\overline{\{3, 6, 9, 12, \dots\}} = \overline{\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}} = \mathbb{N}$ όμοια με το πριν.

iii) Είναι καθε άλλο απέραντο σύνολο είναι $\subseteq \mathbb{N}$

Δεν υπάρχει κανένα άλλο πυκνό σύνολο πλην των απεράντων είναι $\subseteq \mathbb{N}$.

Ορισμος/Προταση/Συμπερασμα:

Εαν $A\subseteq E$ τοπολογικος χωρος

p σσ του $A \Leftrightarrow (\forall G\in\mathcal{T})$: με $p\in G$ ισχυει $(G-\{p\})\cap A\neq\emptyset$

Τοπολογιες παραγομενες απο Συλλογες Συνολων.

Ορισμος (Θεωρητικος)

Εστω $\mathcal{A}$ συλλογή υποσυνολων του συνόλου E, τοτε ως:

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \bigcap\{\mathcal{T} : \text{τοπολογια στο } E \text{ και } \mathcal{T}\supseteq \mathcal{A}\}$$

και καλείται τοπολογία παραγόμενη απο τη συλλογή $\mathcal{A}$ καθώς $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Ορισμος:

$\mathcal{A}_\tau = \{A\subseteq E : A$ πεπερασμένη τομη των στοιχείων της $\mathcal{A}\}\cup\{E\}$

$\mathcal{A}_\varepsilon = \{A\subseteq E : A$ ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}\}\cup\{\emptyset\}$

ΛΗΜΜΑ: Για τις $\mathcal{A}_\tau$ και $\mathcal{A}_\varepsilon$ συλλογές, ισχύουν:

i) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_\tau$ & $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_\varepsilon$

ii) $\mathcal{A}_{\tau\tau}\subseteq\mathcal{A}_\tau$

iii) $\mathcal{A}_{\varepsilon\varepsilon}\subseteq\mathcal{A}_\varepsilon$

iv) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow \begin{cases}\mathcal{A}_\tau\subseteq\mathcal{B}_\tau\\ \mathcal{A}_\varepsilon\subseteq\mathcal{B}_\varepsilon\end{cases}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $\bar{X}\in\mathcal{A}\Rightarrow X\cap X\in\mathcal{A}$

ii) Εστω $\{A_1,A_2,\dots,A_k\}\subseteq\mathcal{A}_\tau$

τοτε $A_1 = G_1^1\cap G_2^1\cap\dots\cap G_{\lambda_1}^1$

$\vdots$

$A_k = G_1^k\cap G_2^k\cap\dots\cap G_{\lambda_k}^k$

Αρα, $A_1\underbrace{\cap A_2\cap\dots\cap}_{x\in\mathcal{A}_{\tau\tau}} A_k\in\mathcal{A}_\tau$

iii) ομοια με το (ii).

iv) Εστω $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ και

$x\in\mathcal{A}_\tau\Rightarrow x=G_1\cap\dots\cap G_k$

οπου $G_i\in\mathcal{A}$, $i=1,\dots,k$

Ομως, τοτε G_i, $i=1,\dots,k$

ανήκουν και στο $\mathcal{B}$.

Αρα, $x\in\mathcal{B}_\tau$

Πρόταση: Να δείξετε ότι $\Lambda_{\tau\varepsilon}$ τοπολογία (Ισχύει $\Lambda_{\tau\varepsilon} = (\Lambda_\tau)_\varepsilon$)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

i) $\emptyset \in \Lambda_{\tau\varepsilon}$ και $E \in \Lambda_{\tau\varepsilon}$ προφανή

ii) Έστω X & Y τυχόντα εν $\Lambda_{\tau\varepsilon}$

$X = \bigcup_{i\in I} X_i$, $X_i \in \Lambda_\tau$ και $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$, $Y_j \in \Lambda_\tau$

$X \cup Y = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} (X \cap Y)$ ένωση πεπερασμένων στοιχείων

Άρα, $X \cap Y \in \Lambda_{\tau\varepsilon}$

iii) Έστω $G \subseteq \Lambda_{\tau\varepsilon} \Longrightarrow \bigcup G \in (\Lambda_{\tau\varepsilon})_\varepsilon = \Lambda_{\tau\varepsilon\varepsilon} \subseteq \Lambda_{\tau\varepsilon}$

Άρα, η $\Lambda_{\tau\varepsilon}$ τοπολογία

Πρόταση: Να δείξετε ότι $\Lambda_{\tau\varepsilon} = \mathcal{T}(A)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

$A \subseteq \Lambda_{\tau\varepsilon} \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}(\Lambda_{\tau\varepsilon}) \overset{?}{=} \Lambda_{\tau\varepsilon}$

Αντίστροφα έστω $X \in \Lambda_{\tau\varepsilon} \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} X_i$, $X_i \in \Lambda_\tau$

$A \subseteq \mathcal{T}(A) \Rightarrow X \in \mathcal{T}(A)$

?: $(A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}(B)) \xrightarrow{\text{Απόδ}}$ Έστω $X \in \mathcal{T}(A) \xrightarrow{\mathcal{T}(B) \supseteq B \supseteq A} X \in \mathcal{T}(B)$

?: (G τοπολογία $\Rightarrow \mathcal{T}(G) = G$) προφανή εξ ορισμού

Εφαρμογή 1:

Ας είναι $\mathcal{T} = \{(a,+\infty) / a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

1) Η $\mathcal{T}$ τοπολογία στο $\mathbb{R}$

2) Να βρεθούν τα $\overline{[3,7)}$ και $\overline{\{7,24,85\}}$ και $\overline{\{3,6,9,12,\dots\}}$

3) $[7,+\infty)^\circ$ και $\partial[7,+\infty) =$;

<u>ΛΥΣΗ</u>

1) Από ορισμό είναι τοπολογία στο $\mathbb{R}$ $((a,\infty) \cap (b,\infty)) = (\max\{a,b\}, +\infty)$

$\bigcup_{i\in I} (a_i,\infty) = (b,\infty)$ όπου $b = \inf_{i\in I} a_i$

2) $(a,\infty)^c = (-\infty, a]$ και $(-\infty, b]$, $b \geq 7$

τότε $\bigcap_{b\geq 7} (-\infty, b] = (-\infty, 7] = \overline{[3,7)}$

και

$\overline{\{7,24,85\}} = (-\infty, 85)$ και $\overline{\{3,6,9,12,\dots\}} = \mathbb{R}$

3) $[7,\infty)^{\circ} = (7,\infty)$

Αποδ:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ ανοικτό} \\ A \subseteq [7,\infty) \end{array}\right| \Rightarrow (x,\infty),\ x \geq 7$$

$$\bigcup_{x \geq 7} (x,\infty) = (7,\infty)$$

$$\partial[7,\infty) = \underbrace{\overline{[7,\infty)}}_{\text{πυκνό}} - [7,\infty)^{\circ} = \mathbb{R} - (7,\infty)^{\circ} = (-\infty,7)$$

Εφαρμογή 2:

Για την τοπολογία $\mathcal{T} = \{E_v : v \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, $E_v = \{v, v+1, v+2, \dots\}$ $v \in \mathbb{N}$

Εχουμε το σύνολο $\{4, 13, 28, 37\} = X \subseteq \mathbb{N}$. Να βρεθούν τα σσ του παραπάνω συνόλου X

ΛΥΣΗ

p σσ του $X \Leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{T})\ p \in G \Rightarrow (G - \{p\}) \cap X \neq \emptyset$

- για $p < 37$: Τότε τα ανοικτά σύνολα που περιέχουν το p θα περιέχουν και το 37

$37 \in (G - \{p\}) \cap X \neq \emptyset \Rightarrow p \in X'$

- για $p \geq 37$: τότε τα ανοικτά σύνολα που περιέχουν το p, είναι: $E_1, \dots, E_{37}, E_p$, επομένως:

$\underset{k \leq p}{(E_k - \{p\})} \cap X = \emptyset$, $k = 1, \dots, p$

Εφαρμογή 3: A κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

ΛΥΣΗ

$(\Rightarrow)$: Εστω A κλειστό ΘΔΟ για τυχόν $p \in A'$ ανήκει στο A

Ισοδύναμα: $p \notin A \Rightarrow p \notin A'$

$p \notin A \Rightarrow p \in A^c \equiv$ ανοικτό

$(A^c - \{p\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow p$ όχι σσ $\Rightarrow p \notin A'$

$(\Leftarrow)$: Εστω $A' \subseteq A$ ΘΔΟ A^c ανοικτό: $p \in A^c \Rightarrow p \notin A'$

$\Rightarrow (\exists G \text{ ανοικτό με } p \in G) : (G - \{p\}) \cap A = \emptyset \overset{p \notin A}{\Rightarrow} G \cap A = \emptyset \Rightarrow G \subseteq A^c$

Εφαρμογή 4: Εστω $f: X \to Y$ συνάρτηση $X \neq \emptyset$ $(Y, \mathcal{T})$
ΝΔΟ $C = \{ f^{-1}(A) : A \subseteq \mathcal{T} \}$ είναι σύνολο στο X

__Λύση__

Έστω A, B εν C ώστε $A = f^{-1}(K)$ & $B = f^{-1}(\Lambda)$
με K, Λ εν $\mathcal{T}$.

$A \cap B = f^{-1}(K) \cap f^{-1}(\Lambda) = f^{-1}(\underbrace{K \cap \Lambda}_{\in \mathcal{T}}) \Rightarrow A \cap B \in C$

$A_i, i \in I$ οικογένεια εν $C \Rightarrow (\forall i \in I) : A_i = f^{-1}(B_i)$, $B_i \in \mathcal{T}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_{i \in I} B_i}_{\in \mathcal{T}}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

ΕΡΓΑΣΙΑ

Άσκηση 1: Εστω $E \neq \emptyset$ και $\mathcal{R} \subseteq P(E)$ τ/ω: ($\mathcal{R}$: συλλογή)

i) $\forall K_i$ εν $\mathcal{R}$, $i \in I$ ισχύει $\bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{R}$

ii) Αν I πεπερασμένο τότε $\bigcup_{i \in I} K_i \in \mathcal{R}$

Νδο η συλλογή:

$\mathcal{T} = \{ X \subseteq E : X^c \in \mathcal{R} \} \cup \{ \emptyset, E \}$

είναι τοπολογία τ/ω τα κλειστά υποσύνολα του E να είναι ακριβώς τα στοιχεία της $\mathcal{R}$.

Άσκηση 2: Έστω $E \neq \emptyset$ και $K : P(E) \to P(E)$ τ/ω

i) $K(\emptyset) = \emptyset$

ii) $A \subseteq K(A)$

iii) $K(K(A)) = K(A)$

iv) $K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$

} Αξιώματα του Kuratowski

και έστω $\mathcal{R} = \{ X \subseteq E : X = K(X) \}$

Νδο η συλλογή $\mathcal{T}$ που ορίζεται όπως στην ασκ. 1. είναι τοπολογία και μάλιστα τ/ω $K(S) = \bar{S}$ ($\bar{S}$ η θήκη του S ως προς την $\mathcal{T}$)